

# Как семиклассники выполнили диагностическую работу по математической грамотности в 2020-21 учебном году

## Что такое математическая грамотность и как она оценивалась?

Подходы к разработке измерительных материалов заданий для оценки математической грамотности основаны на концепции международного исследования PISA (Programme for International Students Assessment), которое проводится раз в три года и отвечает на вопрос «Обладают ли учащиеся 15-летнего возраста, получившие обязательное общее образование, знаниями и умениями, необходимыми им для полноценного функционирования в современном обществе, т.е. для решения широкого диапазона задач в различных сферах человеческой деятельности, общения и социальных отношений?». За основу подготовки данной диагностической работы была взята спецификация диагностических работ по математике для учащихся 8-х и 9-х классов, разработанная коллективом сотрудников ФГБНУ «Институт стратегии развития образования Российской академии образования» под общим руководством Г.С. Ковалевой.

Авторы международного исследования PISA определили математическую грамотность как «способность индивидуума формулировать, применять и интерпретировать математику в разнообразных контекстах. Она включает математические рассуждения, использование математических понятий, процедур, фактов и инструментов для описания, объяснения и предсказания явлений. Она помогает людям понять роль математики в мире, высказывать хорошо обоснованные суждения и принимать решения, которые должны принимать конструктивные, активные и размышляющие граждане»<sup>1</sup>.

Для оценки математической грамотности учащимся предлагаются не типичные учебные математические задачи, характерные для традиционных систем обучения и мониторинговых исследований математической подготовки, а близкие к реальным проблемные ситуации, представленные в некотором контексте и разрешаемые доступными учащемуся средствами математики.

В краевой диагностической работе по математической грамотности для обучающихся 7-х классов в Красноярском крае приняли участие 26 754 семиклассников. Это составляет 87,44% от общего количества учащихся 7-х классов в крае.

Структуру инструментария определяют «три компонента:

- *контекст*, в котором представлена проблема;
- *содержание математического образования*, которое используется в заданиях;
- *мыслительная деятельность (компетентностная область)*, необходимая для того, чтобы связать контекст, в котором представлена проблема, с математическим содержанием, необходимым для её решения»<sup>2</sup>.

## Основные результаты

Для описания достижений обучающихся в области математической грамотности установлены 3 уровня: **ниже базового**, **базовый** и **повышенный**.

**Базовый уровень** (пороговый) означает, что ученик начинает демонстрировать математическую грамотность – применение математических знаний и умений в простейших неучебных ситуациях.

<sup>1</sup> Результаты международного исследования PISA 2015 (краткий отчет на русском языке) [Электронный ресурс]. URL: [http://centeroko.ru/pisa15/pisa15\\_pub.html](http://centeroko.ru/pisa15/pisa15_pub.html)

<sup>2</sup> Рослова Л. О., Краснянская К. А., Квитко Е. С. Концептуальные основы формирования и оценки математической грамотности // Отечественная и зарубежная педагогика. 2019. Т. 1, № 4 (61). С. 58–79.

*Повышенный уровень* означает, что ученик обладает математической грамотностью проявляет способность использовать имеющиеся математические знания и умения для получения новой информации и принятия решений.

*Уровень ниже базового* означает, что ученик не продемонстрировал математическую грамотность.

Описание количественных критериев достижения каждого из выделенных уровней приведено в таблице:

№ п/п	Уровень математической грамотности	Количественные критерии
1	Повышенный	Ученик выполнил более 5 заданий среднего или высокого уровня сложности и при этом набрал не менее 2 баллов по любым трем компетентностным областям
2	Базовый	Ученик выполнил более 5 заданий любого уровня сложности
3	Ниже базового	Ученик выполнил менее 6 заданий в работе

В среднем ученики набрали 9,73 балла (максимальный балл – 26). Средний процент выполнения диагностической работы по математической грамотности в регионе составил 37,42%. В текущем году девушки выполнили работу чуть лучше юношей (в среднем на 0,7%). Средний процент выполнения КДР7 в городских школах на 3% выше, чем в сельских.

Границу базового уровня преодолели 67% участников КДР7. Из них 21% показал повышенный уровень. Каждый третий семиклассник не достиг базового уровня – не продемонстрировал математическую грамотность.

#### **Распределение участников КДР7 по уровням математической грамотности**

Продemonстрированный уровень	Количество учеников	Доля
Повышенный	5704	21%
Базовый	12310	46%
Ниже базового	8714	33%

Рассмотрим результаты сначала относительно освоения компетентностных областей.

#### **Средний процент освоения компетентностных областей**

№	Компетентностная область	Количество заданий (номера заданий)	Средний процент выполнения заданий этой области
1	Формулировать ситуацию математически	4 (4, 8, 11, 15)	23%
2	Применять математические понятия, факты, процедуры	5 (1, 5, 9, 10, 13)	48%
3	Интерпретировать/оценивать математические результаты	3 (2, 3, 7)	43%
4	Рассуждать	4 (6, 12, 14, 16)	37%

Компетентностная область «**Применять математические понятия, факты, процедуры**» включает следующие умения<sup>3</sup>:

- выбирать, разрабатывать и реализовывать подходящие стратегии поиска математических решений;
- использовать математический инструментарий, включая методы, для поиска точных или приближенных решений;
- применять математические факты, правила, алгоритмы и структуры при поиске решений;
- выполнять действия с числами, графическими и статистическими данными и информацией, алгебраическими выражениями и уравнениями, а также геометрическими фигурами;
- создавать диаграммы, графики, конструкции и извлекать из них математическую информацию;
- обобщать результат применения математических процедур для поиска решений;
- использовать и переключаться между различными представлениями в процессе поиска решений;
- размышлять над математическими аргументами, объяснять и обосновывать математический результат;
- оценивать значимость наблюдаемых (или предлагаемых) закономерностей и закономерностей в данных.

Задания, проверяющие умения из компетентностной области «применять», семиклассники выполняют лучше всего – средний процент выполнения заданий составил 48%.

Приведем пример задания.

Две фирмы продают канцелярские товары. Семён перед началом учебного года составил такой список необходимых покупок: **три общие тетради, один набор тонких тетрадей по разным предметам, два набора ручек и дневник.**

На сайтах двух магазинов Семён нашел прайсы и составил сравнительную таблицу:

Наименование товара	Стоимость единицы товара, в рублях	
	Фирма «Отличник»	Фирма «Школьник»
Дневник	50	60
Пенал	280	270
Школьный рюкзак	1720	1680
Набор простых карандашей	60	50
Набор ручек	125	150
Набор тонких тетрадей по разным предметам	530	545
Тетрадь общая	310	330

**Задание 5.** Сколько заплатит Семён, если сделает покупку строго по списку в фирме «Отличник»?

**Ответ:** \_\_\_\_\_ руб.

Справились полностью 68%

<sup>3</sup> PISA 2021 MATHEMATICS FRAMEWORK [Электронный ресурс]. URL://<https://pisa2021-maths.oecd.org/#Mathematical-Reasoning>

- Можно предположить, что при решении подобных задач ученикам особенно сложно:
- переводить описанную жизненную ситуацию на математический язык;
  - находить и извлекать разрозненную математическую информацию в различном контексте;
  - отбирать информацию, поскольку задача содержит обычно избыточную информацию;
  - применять математические знания, к которым они не обращались в последнее время на уроках.

Компетентностная область «**Интерпретировать, использовать и оценивать математические результаты**» включает умения<sup>4</sup>:

- интерпретировать информацию, представленную в графической форме, на диаграммах;
- оценивать математический результат с точки зрения контекста;
- понимать «масштабы и ограничения» математических понятий и решений;
- интерпретировать математический результат в реальном контексте;
- оценивать обоснованность математического решения в контексте реальной задачи;
- понимать, как реальный мир влияет на математические результаты, процедуры или модели, чтобы делать суждения с учетом контекста, как результаты должны быть скорректированы или применены;
- объяснять, почему математический результат или вывод имеет или не имеет смысла с учетом контекста проблемы;
- критиковать и определять пределы модели, используемой для решения проблемы;
- использовать математическое мышление для прогнозирования, доказательства аргументов, тестирования и сравнения предлагаемых решений.

С заданиями компетентностной области «Интерпретировать» учащиеся справляются почти с такой же эффективностью, что и в области «Применять»: средний процент выполнения заданий составил 43%.

Приведем пример.

Для участия в школьной конференции о здоровом образе жизни ученик 8 класса Артём провёл опрос семиклассников о том, как они проводят свободное время. Артём подсчитал, что в среднем свободное время семиклассника составляет 6 часов.

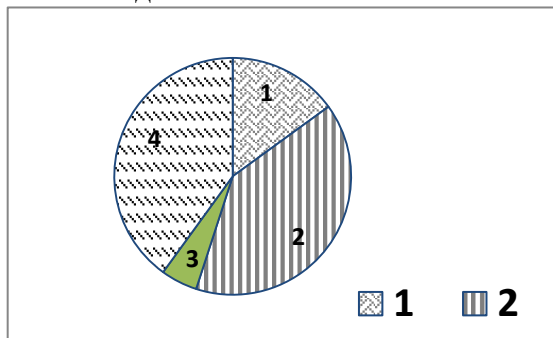
Учеников 7 класса спросили, как они распределяют свободное время между следующими занятиями: компьютерные игры, общение в социальных сетях, выполнение домашних заданий и занятие спортом. В таблице приведены ответы трёх учеников: Кости, Степана и Маши.

**Таблица № 1**

Занятия	Ответы		
	Костя	Степан	Маша
компьютерные игры	66%	25%	15%
общение в социальных сетях	12%	10%	5%
выполнение домашних заданий	12%	40%	40%
занятие спортом	10%	25%	40%

<sup>4</sup> PISA 2021 MATHEMATICS FRAMEWORK [Электронный ресурс]. URL://<https://pisa2021-maths.oecd.org/#Mathematical-Reasoning>

### Задание 3.



Составляя диаграммы по таблице № 1, Артём забыл их подписать. Определите, чей ответ – Кости, Степана или Маши, – представлен на диаграмме и какому занятию из приведённых ниже соответствует каждый сектор на диаграмме.

А. общение в социальных сетях
Б. компьютерные игры
В. занятия спортом
Г. выполнение домашних заданий

*Впишите в ответе рядом с номером каждого сектора букву, которой обозначено соответствующее занятие.*

Ответ. 1 - \_\_\_\_\_, 2- \_\_\_\_\_ 3 - \_\_\_\_\_, 4 - \_\_\_\_\_.

Справились полностью 52%

Можно предположить, что при решении задач, относящихся к компетентностной области «интерпретировать математические результаты», в том числе данного задания ученикам особо сложно:

- работать с задачей, представленной в форме, отличной от учебной;
- работать с информацией, представленной в различных формах (в этом случае, диаграммы и таблицы), соотносить их и интерпретировать одну через другую;
- критиковать и определять границы модели;
- понимать и объяснять, почему математический результат или вывод имеет или не имеет смысла с учетом контекста проблемы.

Задания компетентностной области «**Рассуждать**» оценивают умение размышлять над аргументами, обоснованиями и выводами, над различными способами представления ситуации на языке математики, в том числе<sup>5</sup>:

- делать вывод; выбирать и давать соответствующее обоснование, размышлять над аргументами, ходом рассуждений;
- представлять ситуацию различными способами, в том числе в соответствии с различными математическими теориями, делать соответствующие допущения. Объяснять и защищать свои представления, модель. Анализировать соответствие математической задачи и предложенной модели. Определять, критиковать ограничения модели. Объяснять отношения между контекстно-обусловленным языком проблемы и формально-символическим языком ее представления на языке математики;
- понимать и использовать определения, правила, алгоритмы и формальные системы. Объяснять, как алгоритм работает, обнаруживать и исправлять ошибки в алгоритмах и процедурах. Обосновывать выбираемые и предложенные процедуры и модели с точки зрения получения результата. Размышлять над математическим решением и создавать объяснения и аргументацию, которые его подтверждают или опровергают;
- давать математическую аргументацию полученному результату. Объяснить его разумность в рамках ситуации. Интерпретировать математический результат в контексте ситуации, объясняя полученный результат.

<sup>5</sup> PISA 2021 MATHEMATICS FRAMEWORK [Электронный ресурс]. URL://<https://pisa2021-maths.oecd.org/#Mathematical-Reasoning>

Компетентностная область «рассуждать» вызывать у семиклассников больше сложностей – средний процент выполнения по этой области - 37%.

Приведем пример задания.

Две фирмы продают канцелярские товары. Семён перед началом учебного года составил такой список необходимых покупок: **три общие тетради, один набор тонких тетрадей по разным предметам, два набора ручек и дневник.**

На сайтах двух магазинов Семён нашел прайсы и составил сравнительную таблицу:

Наименование товара	Стоимость единицы товара, в рублях	
	Фирма «Отличник»	Фирма «Школьник»
Дневник	50	60
Пенал	280	270
Школьный рюкзак	1720	1680
Набор простых карандашей	60	50
Набор ручек	125	150
Набор тонких тетрадей по разным предметам	530	545
Тетрадь общая	310	330

**Задание 6.**

А) Может ли Семён без вычислений определить, в какой фирме приобрести указанный выше канцелярский набор выгоднее?

Б) Если да, то поясните, каким способом это можно определить, и укажите название фирмы.

*А) Можно ли без вычислений определить, где покупка выгоднее? Отметьте ответ знаком «V».*

ДА                       НЕТ

*Б) Название фирмы, где покупка выгоднее: \_\_\_\_\_.*

*Пояснение: \_\_\_\_\_*

Справились полностью 47,69%

Можно предположить, что при решении задач, требующих умения строить математические рассуждения, в том числе данного задания, ученикам сложно:

- использовать здравый смысл, перебор возможных вариантов, метод проб и ошибок;
- отбирать информацию среди избыточной;
- находить и удерживать все условия, необходимые для решения и его интерпретации;
- давать математическую аргументацию полученному результату, объяснить его разумность в рамках ситуации, интерпретировать математический результат в контексте ситуации в целях объяснения полученного результата;
- представлять в словесной форме обоснование решения.

Задания данного типа оценивают умение «**Формулировать**» реальные ситуации математически<sup>6</sup>:

- выбирать подходящую модель из списка предложенных;
- выявлять математические аспекты проблемы в реальном контексте и значимые переменные;
- распознавать математические структуры (включая закономерности, взаимосвязи и закономерности) в задачах или ситуациях;
- упрощать ситуацию или проблему, чтобы сделать ее поддающейся математическому анализу (например, путем разложения на отдельные задачи);
- выявлять ограничения и предположения, лежащие в основе любого математического моделирования, и упрощения, почерпнутые из контекста;
- представлять ситуацию математически, используя соответствующие переменные, символы, диаграммы и стандартные модели;
- представлять проблему по-другому, включая ее организацию в соответствии с математическими понятиями и соответствующими допущениями;
- понимать и объяснять связи между контекстно-зависимым языком проблемы и символическим, формальным языком, необходимым для ее представления на языке математики;
- переводить задачи на математический язык или давать им математическое представление;
- распознавать аспекты проблемы, соответствующие известным математическим понятиям, фактам или процедурам, задачам;
- создавать упорядоченные пошаговые инструкции, алгоритмы для решения задач.

Задания из компетентностной области «формулировать» семиклассникам выполнять труднее всего. С ними справилось менее четверти семиклассников – средний процент выполнения составил 23%.

Приведем пример задания.

Для участия в школьной конференции о здоровом образе жизни ученик 8 класса Артём провёл опрос семиклассников о том, как они проводят свободное время. Артём подсчитал, что в среднем свободное время семиклассника составляет 6 часов.

Учеников 7 класса спросили, как они распределяют свободное время между следующими занятиями: компьютерные игры, общение в социальных сетях, выполнение домашних заданий и занятие спортом. В таблице приведены ответы трёх учеников: Кости, Степана и Маши.

**Таблица № 1**

Занятия	Ответы		
	Костя	Степан	Маша
компьютерные игры	66%	25%	15%
общение в социальных сетях	12%	10%	5%
выполнение домашних заданий	12%	40%	40%
занятие спортом	10%	25%	40%

#### **Задание 4.**

Обсуждая выступление Артёма, участники конференции выяснили, что **четверть** времени, отведённого на выполнение домашнего задания, каждый из ребят проводит за компьютером: приходится искать информацию в интернете, готовить презентации и т.д.

<sup>6</sup> PISA 2021 MATHEMATICS FRAMEWORK [Электронный ресурс]. URL://<https://pisa2021-maths.oecd.org/#Mathematical-Reasoning>

Как будет выглядеть таблица № 1, если её перестроить после обсуждения с учетом изменений?

**Внесите соответствующие значения в процентах в нужные ячейки таблицы № 2:**

**Таблица № 2**

Занятия	Ответы		
	Костя	Степан	Маша
время, проводимое за компьютером, включая компьютерные игры и домашние задания			
общение в социальных сетях через смартфон			
выполнение домашних заданий без использования компьютера			
занятия спортом			

Справились полностью 33%

Теперь рассмотрим результаты КДР7 относительно содержания математического образования, которое используется в тестовых заданиях (предметное ядро функциональной грамотности). Математическое содержание распределено по четырём категориям: *количество, пространство и форма, изменения и зависимости, неопределенность и данные*.

На тематику содержания, опираются вопросы, используемые для решения проблем:

- *количество (арифметические действия с числами);*
- *пространство и форма (геометрический материал);*
- *изменения и зависимости (алгебраический материал в части работы с зависимостями между переменными в разных процессах);*
- *неопределенность и данные (вероятностные и статистические явления и зависимости, а также переструктурирование данных, представленных в разной форме: графики, диаграммы и пр.).*

Приведем результаты освоения содержательных областей, показанные семиклассниками.

**Средний процент освоения содержательных областей**

№	Компетентностная область	Количество заданий (номера заданий)	Средний процент выполнения заданий этой области
1	Количество	6 (1, 2, 5 - 7, 9)	46%
2	Пространство и форма	3 (10 - 12)	15%
3	Изменения и зависимости	5 (8, 13 - 16)	40%
4	Неопределенность и данные	2 (3, 4)	49%



Четыре указанные области в совокупности призваны охватить основной диапазон математических знаний, необходимых 15-летним учащимся в качестве основы для жизни и дальнейшего расширения их математического кругозора. Предметный материал является традиционным для большинства программ по математике.

Лучше всего ученики умеют выполнять задания из содержательной области **«Неопределенность и данные»** – средний процент выполнения заданий составил 49%, т.е. семиклассники справляются в среднем с половиной заданий.

Задания данного типа оценивают умение применять следующие математические понятия, факты, процедуры:

- чтение диаграммы, соотнесение данных, представленных в различной форме;
- переструктурирование данных согласно условиям, внесение данных в таблицу.

Нужно заметить, что в работе на эту содержательную область были приведены задания низкого и среднего уровня сложности с кратким ответом в знакомом для учащихся – образовательном – контексте, что, вероятно, повлияло на успешность выполнения заданий.

Примеры заданий данного типа приведены выше – задание 3 на стр. 5 и задание 4 на стр. 7-8. Прочсть диаграммы и соотнести их данные с текстом задания полностью верно смогли 52% учеников, участвовавших в диагностике, а с заданием 4 справилась лишь третья часть учащихся - 33.

Можно предположить, что при решении данных задач ученикам особенно сложно находить и удерживать все условия, необходимые для выполнения задания – определить, какая величина, выраженная в процентах, является целым, а какие частью и как эти части нужно после изменения данных и требуемых задачи перестроить (найти четвёртую часть времени, отводимую на выполнение домашних заданий, уменьшив на неё время домашних заданий, и верно её суммировать со временем, проводимым за компьютером).

Соответственно, при изучении математики рекомендуется чаще предлагать ученикам задания, требующие переструктурирования данных.

Следующая по успешности освоения содержательная область – **«Количество»**, в основном требующая умения выполнять арифметические действия с числами. С этими заданиями справились немногим менее половины семиклассников – 46%. В работе данная область представлена шестью заданиями (1, 2, 5, 6, 7, 9).

Пример задания, с которым ученики справились лучше всего (68%), приведен выше – это задание 5. Оно схоже с заданиями, встречающимися в школьных учебниках. Сложность состоит лишь в том, что оно помещено в реальный контекст. Но эта ситуация покупки хорошо знакома семиклассникам.

Материал задания для сравнения уже представлен в переработанном виде – прайсы обоих магазинов содержат одинаковые товары, расположенные в единой таблице, т.о. большая часть работы по выделению необходимых величин и их соотнесению уже сделана. Нужно выбрать необходимые данные из структурированного списка, верно составить числовое выражение, выполнить действия с рациональными числами и сравнить полученные результаты.

Задание, требующее от учеников не вычисления, а оценки, вызывает уже больше трудностей (см. выше задание 6) – оценку и верное развернутое обоснование смогли сделать менее половины учеников - 48%. Ученики не указывают в обосновании выбора, что цены ниже только на товары из предложенного списка, или выбирают нерациональный способ решения – составляя числовые выражения для вычисления общей стоимости в двух фирмах, хотя «запрет» на такой способ прямо сформулирован в тексте задания.

Но хуже всего ученики справились с заданиями из содержательной области **«Количество»** в заданиях, требующих вычисления процентов.

Приведем пример задания.

**Задание 7.** Мама оставила Семёну 2000 р. на покупку рюкзака и пенала. Ближайшие магазины объявили акции на школьные товары.

Фирма «Школьник» объявила акцию «скидка 30% на второй товар в чеке». При оплате чека из двух приобретенных товаров скидка распространяется на товар с наименьшей или с равной ценой.

Фирма «Отличник» выбрала другой тип акции «скидка 10% на все товары дороже 300 рублей».

А) В каком магазине стоит сделать покупку Семёну, чтобы карманных денег у него осталось больше?

Б) Запиши оставшуюся у Семёна сумму и развернутое обоснование ответа.

А) **Название фирмы:** \_\_\_\_\_.

Б) **Останется карманных денег:** \_\_\_\_\_ руб.

**Обоснование:**

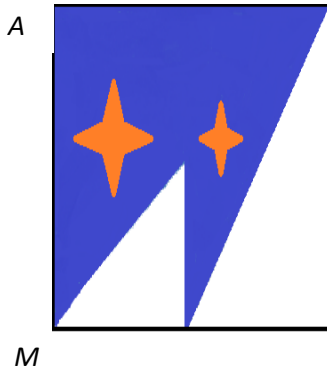
Справились полностью 16%

Это задание предполагает владение умением интерпретировать, однако столь низкий процент выполнения задания дает основания полагать, что сложность состоит и в том, что семиклассники недостаточно владеют понятием процента и умением выполнять действия с рациональными числами в ситуации «зашумления», им трудно выбирать нужные данные для вычислений процентов и сравнить полученные остатки, выраженных уже не в процентах.

На геометрическом материале с составлением пропорции и вычислением недостающего члена пропорции справились 48%. Можно предположить, что каждый второй семиклассник испытывает трудности не только в составлении пропорции (при условии владения этим понятием, т.к. в тексте прямо используется термин), но и в вычислительных навыках при выполнении действий с натуральными (!) числами.

Приведем пример задания.

### Штандарт школьной команды



На школьном фестивале фантастики каждая команда придумывала себе название, историю и штандарт. Штандарт – особый вид флага, часто непрямоугольной формы.

Назовём шириной и длиной штандарта ширину и длину прямоугольника, в который вписан штандарт, причем шириной будем называть меньшую из двух сторон.

Иван на школьном фестивале фантастики собрал свою команду. Они разработали штандарт, который вписан в прямоугольник  $ACDM$ . Ширина штандарта относится к его длине как 4 : 5, т.е.  $AC : CD = 4 : 5$ .

Для подготовки к фестивалю команда Ивана должна изготовить штандарты разных размеров.

**Задание 9.** Иван знает, что ширина основного штандарта должна быть 48 см, а длина подбирается по принятым пропорциям. Иван хочет вырезать штандарт из прямоугольника шириной  $AC$  и длиной  $CD$ . При какой длине  $CD$  (в сантиметрах) вырезанный им штандарт будет соответствовать принятым пропорциям (ширина  $AC=48$  см)?

**Ответ:**  $CD =$  \_\_\_\_\_ см.

Справились полностью 48%

Близкой по уровню успешности выполнения заданий является содержательная область «*Изменения и зависимости*». Из этой группы заданий (№ 8, 13, 14, 15, 16) ученики выполняют чуть более 40%. При этом с заданиями низкого уровня трудности с кратким ответом и опорой на данную в явном виде формулу справляются более половины учеников (задание 13 – 80%, задание 14 – 59%). Задания среднего уровня сложности, требующие оценки и выбора неверных утверждений о зависимости выполнили полностью менее трети участников (задания 15 и 16 – 30% и 31% соответственно). А задания высокого уровня сложности, где требуется перестроить формулы зависимости и произвести верный перевод скидок, выраженных в процентах, в число, - лишь 4%.

Приведем пример задания низкого уровня сложности.

### Прыжки в воду

Ученики спортивной школы по прыжкам в воду занимаются в бассейне с вышками разной высоты – 1 м, 3 м, 5 м и 7,5 м. Глубина погружения спортсмена в воду обозначается буквой  $l$  и зависит от массы прыгуна и его скорости по формуле:

$$l = \frac{mv^2}{2F} \quad (1)$$

В этой формуле  $m$  – масса спортсмена (кг),  $v$  – скорость спортсмена (м/с),  $F$  – сила сопротивления воды (Н). Для техники прыжка «рыбка» с пятиметровой вышки:

$$v = 10 \text{ м/с},$$

$$F \approx 1000 \text{ Н}.$$

**Задание 13.** Принимая гостей из спортивной школы другого города, организаторы решили провести товарищеские соревнования. Один из конкурсов такой: нужно как можно быстрее достать приз, прикрепленный на дне бассейна. Ребята хотят выставить на конкурс такого участника, который глубже всех погрузится в воду после прыжка техникой «рыбка» с пятиметровой вышки, чтобы сократить расстояние в воде до приза. Илья весит 42 кг, Никита – 45 кг, а Сергей – 48 кг.

Кто из ребят погрузится глубже?

**Ответ:** Глубже всех погрузится \_\_\_\_\_.

Справились полностью 80%

Приведем пример задания среднего уровня трудности.

**Задание 16.** Братья-спортсмены Олег и Максим испытывали новое цифровое устройство, с помощью которого можно измерить скорость спортсмена у поверхности воды при выполнении им прыжка в воду. Братья прыгали «рыбкой» с вышек разной высоты. Старший брат, Олег, весит значительно больше младшего брата, Максима. Результаты они записали в таблицу и удивились.

Высота вышки, м	Скорость Олега, м/с	Скорость Максима, м/с
1	4,5	4,5
3	7,7	7,7
5	10	10
7,5	12,2	12,2

*Проанализируй данные таблицы и отметь знаком “V” неверные утверждения.*

№	Утверждение	Неверные утверждения
1	На сколько метров уменьшается высота вышки, на столько же метров секунду уменьшается скорость спортсмена при входе в воду.	

2	Нельзя описать зависимость между скоростью спортсмена перед входом в воду и высотой вышки формулой $y(x)=a \cdot x$ , где $y(x)$ – скорость погружения прыгуна в воду, $x$ – высота вышки, $a$ – коэффициент.	
3	Скорость спортсмена при входе в воду зависит от массы спортсмена.	
4	Чем выше вышка, тем больше скорость спортсмена.	

Справились полностью 31,84%

Приведем пример задания высокого уровня трудности.

**Задание 8.** Накануне 1 сентября фирма «Школьник» объявила предпраздничную акцию на покупку канцтоваров для всего класса сразу. Скидка в 3% начисляется за ударника – ученика, окончившего прошлый учебный год на «4» и «5», и скидка 5% - за отличника. Надо сложить все скидки, начисленные за каждого ученика класса, чтобы вычислить общую скидку для класса (скидка на всю покупку).

Семён предложил своему классу поучаствовать в этой акции и купить каждому ученику по одной общей тетради для уроков математики. В школе одноклассникам Семёна дали справку, что в их классе 4 ученика окончили предыдущий учебный год исключительно на «отлично» и 12 – ударники, окончившие без троек, а всего в классе 25 человек.

Формула для вычисления общей стоимости покупки до начала акции выглядела бы так:

$$S = 25P,$$

где  $P$  – цена одной тетради;  $S$  – общая стоимость покупки.

**Как изменится формула, по которой можно вычислить общую стоимость покупки класса Семёна с учетом акционной скидки?**

**Ответ:**  $S =$  \_\_\_\_\_

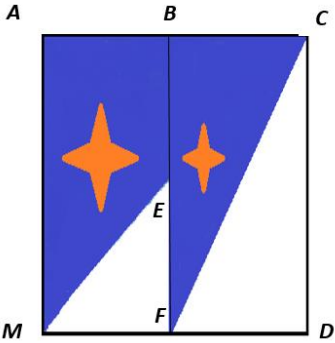
Справились полностью 4%

Как видно из приведенных данных, в содержательной области «Изменения и зависимости» больше всего трудностей возникает при самостоятельном составлении формулы зависимости. Поэтому рекомендуется включать в систематическую работу задания, где требуется на основе анализа зависимости самостоятельно создавать формулы. Такие задания могут иметь и межпредметный характер (математическое описание физических или других процессов).

Наибольшее количество ошибок и отказов от выполнения зафиксировано в заданиях, связанных с содержательной областью «*Пространство и форма*». В работе она была представлена тремя заданиями среднего и высокого уровня трудности (№ 10, 11,12).

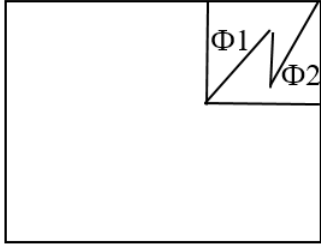
Приведем пример задания высокого уровня сложности.

**Задание 11.**



Иван выяснил, что при размерах прямоугольника-заготовки для флага  $120 \times 150$  мм ( $AC$  – ширина,  $CD$  – длина) длина отрезка  $BE$  составляет 80 мм, а точка  $B$  – середина стороны  $AC$  и  $F$  – середина стороны  $DM$ .

Одноклассники Ивана решили помочь и предложили для экономии материалов укладывать на ткани прямоугольной формы заготовки не в форме прямоугольников, а в форме самих штандартов, развернув их друг к другу «зубцами».



Чтобы убедить Ивана, что это можно сделать без зазоров, они предложили такой эскиз:

Иван заинтересовался возможностью выполнить задание максимально рационально.

**А) Возможно ли сложить два штандарта без зазоров? Отметьте ответ знаком «✓».**

ВОЗМОЖНО                       НЕВОЗМОЖНО

**Б) Если считаете, что это невозможно, то обоснуйте с помощью рисунка (укажите все необходимые размеры).**

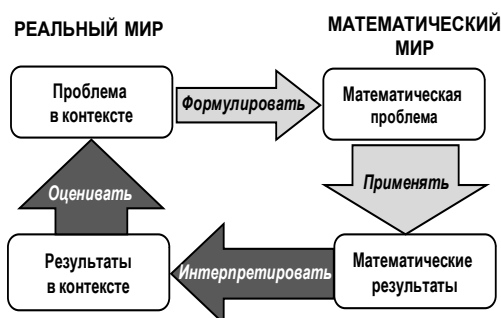
Справились полностью 3%

С заданием справились лишь 3%, а с заданием, в котором требовалось вычислить площадь фигуры сложной формы, используя свойство аддитивности, полностью справились еще меньше учеников – 2%.

Такие низкие результаты могут говорить о минимальном опыте работы учащихся с геометрическим материалом как на уроках математики, так и на других уроках, а также в реальной жизни.

### Рекомендации по развитию математической грамотности

Приведем схему, объясняющую связь четырех компетентностных областей<sup>7</sup>.



<sup>7</sup> Приоритетное направление исследования PISA -2021: оценка математической грамотности Л.О. Рослова, заведующий лабораторией общего математического образования и информатизации, Институт стратегии развития образования Российской академии образования

То, что учащимся лучше удается выполнять задания, требующие применять математические понятия, факты, процедуры, объясняется тем, что в заданиях из учебников, с которыми идет работа на уроках, строится, в лучшем случае, именно переход от математической проблемы к математическому результату. Реже ученикам предлагается интерпретировать полученный математический результат в реальном практическом контексте и с этой точки зрения оценить математический результат. Они почти не сталкиваются с ситуациями, требующими выявлять математические аспекты реальной проблемы, выявлять значимые переменные и формулировать ситуацию математически, выбирая подходящую модель.

Для успешного формирования математической грамотности важно развивать когнитивную сферу ученика, учить познавать окружающий мир, задаваться вопросами. Педагоги должны предлагать учащимся не только готовые, сформулированные стандартно, на математическом языке задания, но и учить математическому моделированию реальных ситуаций, переносить способы решения учебных задач на жизненные проблемы, обеспечивать опыт поиска путей решения жизненных задач.

Необходимо учить ребят работать с задачей, представленной в форме, отличной от учебной, для решения привлекать информацию, использовать личный опыт, работать с информацией, представленной в различных формах (текста, таблицы, диаграммы, схемы, рисунка, чертежа), учить отбирать информацию, для этого задача должна содержать избыточную информацию.

Предлагаемые задачи должны позволять задавать самостоятельно точность данных с учетом условий задачи, использовать здравый смысл при подборе методов решения, осуществлять перебор возможных вариантов. Задачи должны решаться разными способами, требовать представления обоснования решения в словесной форме.

Ученикам редко встречаются задания с выбором ответов, среди которых несколько правильных. Наличие нескольких верных ответов может позволить увидеть разные формулировки одного и того же понятия или рассмотреть с разных сторон одно и то же явление.

И важно обязательно помнить о системности формируемых математических знаний, о необходимости теоретической базы, поскольку без устойчивых знаний их функциональное применение невозможно.